## 867. Idealtheorie ニ就イテ

松下　嘉米男（東大學生）

Integritätsbereich ニ於テ Ideal ニ關スル Teilerkettensatz ガ eingeschränkter Vielfashenkettensatz ヨリ出ルコトハ森、秋月氏等ノ研究ニヨリ既ニ知ラレテ居ル。又 C. Hopkins ガ（einseitiges Ideal ニ対スル）Minimalbedingung ヲ有スル（nicht kommutativer）Ring ニ於テハ Radikal ガ nilpotent ナルコトヲ証シ、之レヲ用ヒテ浅野氏ハ nicht kommutativer Ring ニ於テ簡單ニ Linksideale ニ對スル Teilerkettensatz ヲ Vielfachenkettensatz ヨリ出シタ。之レヨリ直チニ kommutative ナ場合ニ於テハ Teilerkettensatz ガ eingeschränkter Vielfachenkettensatz ヨリ出ルコトガワカル。

サテ普通 Integritätsbereich ニ於ケル Idealtheorie ハ次ノ三ツノ條件ノ下ニ論ゼラレル。

1. Ideale ニ對スル Teilerkettensatz ガ成立スル。
2. Primideal ハ teilerlos ナリ。
3. Quotienkörper ニ於テ ganz abgeschlossen ナリ。

然ルニ 1, 2ハ eingeschrankter vielfashen

kettensatz ヨリ出ル以上 1. 2 ノ代リニ eingeschränkter Vielfashenkettensatz ヲ以テシテモ Idealtheorie ハ同様ニ論ジラレルワケデアル

ソコデ eingeschränkter Vielfashenkettensatz ヨリ一度 Teilerkettensatz ヲ出スコトヲセズ直接ニ Idealtheorie ヲ論ジル問題ガアル。コレヲ次ノ様ニヤッテ見マシタ。

$\mathfrak{J}$ ヲ次ノ條件ヲ有スル Integritätsbereich トス。

I. Ideal ニ対スル eingeschränkter Vielfachenkettensatz ガ成立スル。

II Quotienkörper ニ於テ ganz abgeschlossen ナリ。

ソウスルト $\mathfrak{J}$ ニ於ケル Ideal ハ Primidealzerlegung ガ出来且ツソノ Primideal ノ順序ヲ問題ニシナケレバ Zerlegung ハ eindeutig ナリ。

之ヲ順ヲ追ッテ証明シマス。尚 Einheitsideal Nullideal ハ Primideal ノ中ニ入レナイデオク。

先ヅ $\mathfrak{J}$ ハ II ニヨリ Einselement ヲ含ミ、I ニヨリソノ Ideal ハ prim ナルトキニ限リ teilerlos ナリ。以下一般ノ Ideal ヲ $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, ....., Primideal ヲ $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, ..... ト記ス。

定理1. $\mathfrak{J}$ ニ於テ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ト $\bar{\mathfrak{J}} = \mathfrak{J}/\mathfrak{a}$ ニ於ケル Primideal ハ 1:1 ニ對應スル。又

$\mathfrak{y} \sim \bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\mathfrak{y}$ ノ $\mathfrak{a}$ ヲ含マナイ Primideal ハ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ對應シ、逆ニ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ對應スル $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ハ $\mathfrak{a}$ ヲ含マナイ。但シコヽニ $\mathfrak{a}$ ハ prim デハナイトスル。

證明. $\mathfrak{y} \sim \bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ニ於テ $\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{y}$ ノ Primideal, $\mathfrak{p} \rightarrow \bar{\mathfrak{p}}$ トスルト $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}$ ナラバ $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{p} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$ デ $\bar{\mathfrak{y}} \supset \bar{\mathfrak{p}}$ トナリ、又 $\bar{\mathfrak{p}}$ ガ $\bar{\mathfrak{y}}$ デ Primideal ヲナスハ明カナリ。

$\mathfrak{p}' \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ トスルト $\mathfrak{y} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ トナリ $\bar{\mathfrak{y}} = (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{p}}')$ トナル。
從ツテ $\bar{\mathfrak{p}} \neq \bar{\mathfrak{p}}'$ ナリ。

次ニ $\bar{\mathfrak{p}}$ ヲ $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Primideal トシ、$\mathfrak{p}$ ヲ $\mathfrak{y} \sim \bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $p \rightarrow \bar{p} \in \bar{\mathfrak{p}}$ ナル $\mathfrak{y}$ ノ Element $p$ ノ全体トスルト $1 \rightarrow \bar{1} \notin \bar{\mathfrak{p}}$ ナル故 $1 \notin \mathfrak{p}$、從ツテ $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{p}$ ナリ。

ソコデ $\mathfrak{p}$ ガ $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ヲナスハ明ラカナリ。

從ツテ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ト $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ノ Primideal トハ $1:1$ ニ對應スル.

$\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}$ トスルト $\mathfrak{y} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$ トナリ $\bar{\mathfrak{y}} = (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{a}}) = (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{0}) = \bar{\mathfrak{p}}$ ナリ。コヽニ $\bar{0}$ ハ $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Null トス。逆ニ $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{y}}$ トスルト $\mathfrak{y} = (\mathfrak{p}, \mathfrak{a})$ トナリ $\mathfrak{p} \not\supset \mathfrak{a}$ ナリ。故ニ $\mathfrak{y} \sim \bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\mathfrak{a}$ ヲ含マナイ Primideal ハ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ對應シ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ對應スル $\mathfrak{y}$ ノ Primideal ハ $\mathfrak{a}$ 含マナイ。

—— 證明終リ ——

次ニ$\mathfrak{r}$ヲRing $\mathfrak{o}$ ノ Radikal トシ, $\mathfrak{p}$ヲ$\mathfrak{o}$ ノ Primideal トスルト $\mathfrak{p}\supset\mathfrak{r}$ナリ。何故ナラバ $a\in\mathfrak{r}$トスルト $a^{\rho}=0$, $\rho$ハアル自然数。$\mathfrak{o}\sim\mathfrak{o}/\mathfrak{p}=\bar{\mathfrak{o}}$ ニ於テ $a\rightarrow\bar{a}$ トスルト $\bar{a}^{\rho}=\bar{0}$、$\bar{\mathfrak{o}}$ ハ Integritätsbereich ナル故ニ、$\bar{a}=\bar{0}$ ナリ。即チ $a\in\mathfrak{p}$, 従ッテ $\mathfrak{r}\subseteq\mathfrak{p}$ ナリ。

ソコデ$\mathfrak{a}$ヲ$\mathfrak{y}$ノPrimデナイIdealトシ $\bar{\mathfrak{y}}=\mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ノ Radikal ヲ $\bar{\mathfrak{r}}$ トスルト $\bar{\mathfrak{y}}/\bar{\mathfrak{r}}$ ハ I ニヨリ Ideal ニ対スル Minimalbedingung ヲ有スルモ halbeinfacher Ring ナリ。従ッテ $\bar{\mathfrak{y}}/\bar{\mathfrak{r}}$ ハ有限個ノ minimales Ideal ノ直和ニナル。

$$\bar{\bar{\mathfrak{y}}}=\bar{\mathfrak{y}}/\bar{\mathfrak{r}}=\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_2+\cdots\cdots+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_r,$$

$$\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_i:\ \text{minimales Ideal.}$$

ソウスルト $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i=\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1+\cdots\cdots+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i-1}+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i+1}+\cdots\cdots+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_r$, $i=1,2,\ldots\ldots,r$ ノ $r$ 個ハ teilerloses Ideal ナリ。即チ $\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i$ ハ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ノ Primideal ナリ。尚コノ外ニ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ノ Primideal ノナイコトハ明ラカナリ。依ッテ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ニ於ケル Primideal ハ $r$ 個アッテ之レ以上ハナイ。従ッテ前定理ニヨリ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\bar{\mathfrak{r}}$ ヲ含ム Primideal ハ丁度 $r$ 個存在スル。所ガ $\bar{\mathfrak{r}}$ ハ $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Radikal ナル故 $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Primideal ハスベテ $\bar{\mathfrak{r}}$ ヲ含ム。故ニ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ於ケル Primideal ハ丁度 $r$ 個ダケ存在スル。之レヲ $\mathfrak{y}$ ニ於テ考ヘルト

定理2. $\mathfrak{y}$ ニ於テ任意ノ Ideal ヲ含ム Primideal

ハ常ニ存在シ且ツソノ数ハ有限ナリ。

尚コノIdealガPrimidealナル時ニモ之ガ成立スルハ明カナリ。

$\mathfrak{J}$ノQuotientenkörper $K$ニ於テ$\mathfrak{p}^{-1}$ヲ$\alpha\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{J}$ナル$\alpha$ノ全体トスルト之ハ$\mathfrak{J}$ノgebrochenes Idealヲナス。

定理3. $\mathfrak{p}$ヲ$\mathfrak{J}$ノPrimideal (ganz) トスルト
$\mathfrak{p}^{-1}\supset\mathfrak{J}$ナリ。

証明. $\mathfrak{J}\mathfrak{p}\subseteq\mathfrak{p}$ナル故ニ$\mathfrak{J}\subseteq\mathfrak{p}^{-1}$ハ明ラカナリ。
今$a\in\mathfrak{p}$トスルト$(a)\subseteq\mathfrak{p}$ナリ。

ソコデ$(a)=\mathfrak{p}$トスルト$\frac{1}{a}\in\mathfrak{p}^{-1}$, $\frac{1}{a}\neq$ ganzナリ。何故ナラバ$\frac{1}{a}=b=$ ganzトスルト$a\in\mathfrak{p}$ナル故$1=ab\in\mathfrak{p}$, 即チ$\mathfrak{J}=\mathfrak{p}$トナリ$\mathfrak{J}\supset\mathfrak{p}$ニ反ス。故ニ$\frac{1}{a}\neq$ ganz. 従ッテコノトキハ$\mathfrak{p}^{-1}\supset\mathfrak{J}$ナリ。

次ニ$(a)<\mathfrak{p}$トスル。
$\bar{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}/(a)$ノRadikalヲ$\bar{\mathfrak{r}}$トスルト

$$\bar{\bar{\mathfrak{J}}}=\bar{\mathfrak{J}}/\bar{\mathfrak{r}}=\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1+\cdots\cdots+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_r,$$

$\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_i$: minimales Ideal

トナリ$\bar{\bar{\mathfrak{J}}}$ノPrimidealハ$\bar{\bar{\mathfrak{p}}}_i=\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_1+\cdots\cdots+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i-1}+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_{i+1}+\cdots\cdots+\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_r$, $(i=1,2,\cdots\cdots,r)$ナリ。$\mathfrak{J}\sim\bar{\mathfrak{J}}\sim\bar{\bar{\mathfrak{J}}}$ニ於テ$\mathfrak{p}\sim\bar{\mathfrak{p}}\sim\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$トスルト$\mathfrak{p}\supset(a)$ナル故$\bar{\mathfrak{p}}$ハ$\bar{\mathfrak{J}}$ノPrimideal.

従ッテ$\bar{\mathfrak{p}}\supseteq\bar{\mathfrak{r}}$, 従ッテ$\bar{\bar{\mathfrak{p}}}$ハ$\bar{\bar{\mathfrak{J}}}$ノPrimidealナリ。即チ$\mathfrak{p}$ハ$\bar{\bar{\mathfrak{J}}}$ーツノPrimidealニ対応スル。例ヘバ

$\mathfrak{z} \sim \bar{\bar{\mathfrak{z}}}_i$ トスル。$\bar{\mathfrak{z}}_i \bar{\mathfrak{l}}_i = \bar{\bar{0}}$ ナル故ニ $\mathfrak{y} \sim \bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\bar{\bar{\mathfrak{l}}}_i$ ニ對應スル $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Element 全体ヲ $\bar{\mathfrak{l}}$ トスルト明ラカニ $\bar{\mathfrak{l}} \supset \bar{\mathfrak{w}} \geqq \bar{0}$ ニシテ $\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{l}} \leqq \bar{\mathfrak{w}}$ ナリ。コヽニ $\bar{\bar{0}}$ ハ $\bar{\bar{\mathfrak{y}}}$ ノ Null. $\bar{0}$ ハ $\bar{\mathfrak{y}}$ ノ Null トス。サテ Ideal ニ對シテ Minimalbedingung ヲ有スル Ring ニアリテハ Radikal ハ nilpotent ナリ。(C. Hopkins. Duke. Math. 4)

従ッテ $\bar{\mathfrak{w}} \geqq \bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{l}}$ ナル故ニアル自然数 $\nu$ ニ對シテ $\bar{\mathfrak{z}}^{\nu} \bar{\mathfrak{l}}^{\nu} = \bar{0}$ トナル。又 $\bar{\mathfrak{l}} \supset \bar{\mathfrak{w}}$ ナル故 $\bar{\mathfrak{l}}^{M} \neq \bar{0}$ $(M=1, 2, \cdots\cdots)$ ナリ。ソコデ $\bar{\mathfrak{z}}^{j}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu} = \bar{0}$ トナル $j$ ノ最小ノ自然数ヲ $\lambda$ トスルト $\bar{\mathfrak{z}}^{\lambda}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu} = \bar{0}$, $\bar{\mathfrak{z}}^{\lambda-1}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu} \neq \bar{0}$ ナリ。
$\bar{\mathfrak{a}} = \bar{\mathfrak{z}}^{\lambda-1}\bar{\mathfrak{l}}^{\nu}$ トスルト $\bar{\mathfrak{z}}\bar{\mathfrak{a}} = \bar{0}$, 之レヲ $\mathfrak{y}$ ニ於ケル関係ニ直スト $\mathfrak{z}\mathfrak{a} \leqq (a)$ ナリ。コヽニ $\mathfrak{a}$ ハ $\mathfrak{y} \sim \bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\bar{\mathfrak{a}}$ ノ Element ニ對應スル $\mathfrak{y}$ ノ Element 全体ナリトス。ソウスルト $\bar{\mathfrak{a}} \supset \bar{0}$ ナル故ニ $\mathfrak{a} \supset (a)$ ナリ。従テ $c\mathfrak{z} \leqq (a)$, $c \notin (a)$, $c \in \mathfrak{a}$, ナル $c$ ガ存在スル。依テ $\frac{c}{a}\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{y}$, $\frac{c}{a} \neq$ ganz ナリ。故ニ $\mathfrak{z}^{-1} \supset \mathfrak{y}$ ナリ。

― 証終 ―

ソウスルト $\mathfrak{z}^{-1} \supset \mathfrak{y} \ni 1$ ナル故 $\mathfrak{z} \subseteq \mathfrak{z}^{-1}\mathfrak{z} \leqq \mathfrak{y}$ ナリ。$\mathfrak{z}$ ハ teilerlos ナル故ニ $\mathfrak{z}^{-1}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ カ若シクハ $\mathfrak{z}^{-1}\mathfrak{z} = \mathfrak{y}$ ナリ。$\mathfrak{z}^{-1}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ トスルト $(\mathfrak{z}^{-1})^{\nu}\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$, $p \in \mathfrak{z}$, $p' \in \mathfrak{z}^{-1}$ トスルト $p'^{\nu}p \in \mathfrak{z} \subset \mathfrak{y}$, $\nu = 1, 2, \cdots\cdots$ 従ッテ II ニヨリ $p' \in \mathfrak{y}$. 即チ $\mathfrak{z}^{-1} \leqq \mathfrak{y}$ ナリ。之 $\mathfrak{z}^{-1} \supset \mathfrak{y}$ ニ反ス。従ッテ

定理4. $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p}=\mathfrak{o}$ ナリ。

之レヨリ任意ノ自然数 $m$ ニ對シ $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{p}^{m+1}$ ナルコトガワカル。ソレハ $\mathfrak{p}\supseteq\mathfrak{p}^{m+1}$ ナル故，今 $\mathfrak{p}^m=\mathfrak{p}^{m+1}$ トスルト $\mathfrak{p}^m(\mathfrak{p}^{-1})^m=\mathfrak{p}^{m+1}(\mathfrak{p}^{-1})^m$. 即チ $\mathfrak{o}=\mathfrak{p}$ トナリ、$\mathfrak{o}\supset\mathfrak{p}$ ニ反ス。故ニ $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{p}^{m+1}$ ナリ。同様ニシテ $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots\cdots,\mathfrak{p}_r$ ヲ Primideal, $m_1,m_2,\cdots\cdots,m_r$ ヲ任意ノ自然数トスルトキ $\mathfrak{p}_1^{m_1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_r^{m_r}\supset\mathfrak{p}_1^{m_1+1}\mathfrak{p}_2^{m_2}\cdots\cdots\mathfrak{p}_r^{m_r}$ ナルコトモ，亦 $\mathfrak{p}^m\supseteq\mathfrak{a}\supseteq\mathfrak{p}^{m+1}$ ナラバ $\mathfrak{p}^m=\mathfrak{a}$ ナルカ若シクハ $\mathfrak{p}^{m+1}=\mathfrak{a}$ ナルコトモ分ル。

以下 $i$, $m$, $\mu$, $\nu$ ハ自然数ヲ表ハシ，$\mathfrak{o}\sim\bar{\mathfrak{o}}=\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ ニ於テ $\mathfrak{o}$ ノ Primideal $\mathfrak{p}$ ト $\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Primideal $\bar{\mathfrak{p}}$ トハ對應スルモノトシ，$\bar{0}$ ハ $\bar{\mathfrak{o}}$ ノ Null トス。ソウスルト

定理5. (1) $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1}\not\supset\mathfrak{a}$ トスルト $\bar{\mathfrak{p}}^m=\bar{\mathfrak{p}}^{m+i}$, $i=1,2,\cdots\cdots$

(2) $(\mathfrak{p}^m\supset)\,\mathfrak{p}^{m+1}\supset\mathfrak{a}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{p}}^m\supset\bar{\mathfrak{p}}^{m+1}\supset\bar{0}$ ニシテ又逆ガ成立スル。

(3) $\bar{\mathfrak{p}}^{m-1}\supset\bar{\mathfrak{p}}^m=\bar{\mathfrak{p}}^{m+1}\neq\bar{0}$ トスルト $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1}\not\supset\mathfrak{a}$ ナリ。

証明

(1) $\mathfrak{p}^m\supset\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1}\not\supset\mathfrak{a}$ ナル故 $\mathfrak{p}^m\supseteq(\mathfrak{p}^{m+1},\mathfrak{a})\supset\mathfrak{p}^{m+1}$. 従ッテ $\mathfrak{p}^m=(\mathfrak{p}^{m+1},\mathfrak{a})$ ナリ。

依ッテ $\mathfrak{p}^{m+1}=(\mathfrak{p}^{m+2},\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ ニシテ。

$\mathfrak{p}^m=(\mathfrak{p}^{m+2},\mathfrak{a}\mathfrak{p},\mathfrak{a})=(\mathfrak{p}^{m+2},\mathfrak{a})$ ナリ。

同様ニシテ $\mathfrak{j}^m = (\mathfrak{j}^{m+i}, \mathfrak{a})$.

故ニ $\bar{\mathfrak{j}}^m = \bar{\mathfrak{j}}^{m+i}$, $i = 1, 2, \cdots\cdots$ ナリ。

(2) $\mathfrak{j}^m \supset \mathfrak{j}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{j}}^m \supset \bar{\mathfrak{j}}^{m+1} \supset \bar{0}$ ナルコトハ明ラカナリ。

逆ニ $\bar{\mathfrak{j}}^m \supset \bar{\mathfrak{j}}^{m+1} \supset \bar{0}$ ナリトス。今 $\mathfrak{j}^m \supset \mathfrak{j}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ が成立シナイトスルト $\mathfrak{j}^m \not\supset \mathfrak{a}$ カ又ハ $\mathfrak{j}^m \supseteq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{j}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ナリ。今 $\mathfrak{j}^m = \mathfrak{a}$ 又ハ $\mathfrak{j}^{m+1} = \mathfrak{a}$ ナルコトハ $\bar{\mathfrak{j}}^m$, $\bar{\mathfrak{j}}^{m+1} \supset \bar{0}$ ヨリ成立セズ。サテ (1) ニヨリ $\mathfrak{j}^m \not\supset \mathfrak{a}$ ナルトキモ $\mathfrak{j}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{j}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ナルトキモ $\bar{\mathfrak{j}}^m = \bar{\mathfrak{j}}^{m+1}$ トナリ $\bar{\mathfrak{j}}^m \supset \bar{\mathfrak{j}}^{m+1}$ ニ反ス。故ニ $\mathfrak{j}^m \supset \mathfrak{j}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ ナリ。

(3) $\bar{\mathfrak{j}}^{m-1} \supset \bar{\mathfrak{j}}^m = \bar{\mathfrak{j}}^{m+1} \neq \bar{0}$ ヨリ (2) ヨリ $\mathfrak{j}^{m-1} \supset \mathfrak{j}^m \supset \mathfrak{a}$, 従ッテ $\mathfrak{j}^m = (\mathfrak{j}^{m+1}, \mathfrak{a})$ ナリ。

——証終リ——

ソコデ $\mathfrak{j}^{m+1} \supset \bar{\mathfrak{j}}^m = \bar{0}$ トスルト $\mathfrak{j}^{m-1} \supset \mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{j}^m$ トナリ $\mathfrak{a} = \mathfrak{j}^m$ トナル。$\mathfrak{j} \supseteq \mathfrak{a}$ トスルト $\bar{\mathfrak{y}} = \mathfrak{y}/\mathfrak{a}$ ニ於テハ I ニヨリ $\bar{\mathfrak{j}} \supset \bar{\mathfrak{j}}^2 \supset \cdots\cdots \supset \bar{\mathfrak{j}}^m = \bar{\mathfrak{j}}^{m+1} = \cdots\cdots$ ナリ。

従ッテ $\bar{\mathfrak{j}}^m = \bar{0}$ トスルト $\mathfrak{j}^m = \mathfrak{a}$ トナリ、$\bar{\mathfrak{j}}^m \supset 0$ トスルト $\mathfrak{j}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{j}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ナリ。即チ

定理6. $\mathfrak{j} \supseteq \mathfrak{a}$ ナルトキハ $\mathfrak{j}^m = \mathfrak{a}$ ナルカ、若シクハ $\mathfrak{j}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{j}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ トナリ、コノ $m$ ハ eindeutig ニ定マル。

又 $\bar{\mathfrak{y}}$ ニ於テ $\bar{\mathfrak{j}}_1^{\nu_1} \cdots\cdots \bar{\mathfrak{j}}_r^{\nu_r} = \bar{0}$ ナラバ $\bar{\mathfrak{y}}$ ニハ $\bar{\mathfrak{j}}_1, \cdots\cdots, \bar{\mathfrak{j}}_r$ 以外ニ Primideal ハ存在シナイ。ソレハ若シ他ニ $\bar{\mathfrak{j}}$ ア

リトスルト $\bar{\mathfrak{q}} = (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{p}}_1^{\nu_1} \cdots\cdots \bar{\mathfrak{p}}_r^{\nu_r}) = (\bar{\mathfrak{p}}, \bar{\mathfrak{o}}) = \bar{\mathfrak{p}}$ トナリ $\bar{\mathfrak{q}} \supset \bar{\mathfrak{p}}$ ニ反スルカラデアル。

従ッテ $\bar{\mathfrak{q}}$ ノ Primideal ヲ $\bar{\mathfrak{p}}_1, \cdots\cdots, \bar{\mathfrak{p}}_r$ トスルト如何ニ自然数 $\mu_i$ ヲエランデモ $\bar{\mathfrak{p}}_{\nu_1}^{\mu_1} \cdots\cdots \bar{\mathfrak{p}}_{\nu_t}^{\mu_t} \neq \bar{\mathfrak{o}}$, $1 \leq t \leq r-1$, $\nu_1, \cdots\cdots, \nu_t$ ハ $1, 2, \cdots\cdots r$ ノ中ノ $t$ 個ノ数ノアル順列ナリ。従ッテ

定理7. $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ヲ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_2$ トスルトキ自然数 $\mu_i$ ヲ如何ニトッテモ $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_{\nu_1}^{\mu_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_{\nu_t}^{\mu_t}$, $1 \leq t \leq r-1$, $\nu_1 \cdots\cdots \nu_t$ ハ $1, \cdots\cdots, r$ ノ中ノ $t$ 個ノアル順列。

ソコデ

定理8. $\mathfrak{a}$ ヲ含ムスベテノ Primideal ヲ $\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_2$ トスル。

コノトキ $r=1$ ナラバ $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^m$ トナル。$m$ ハアル自然数。

$r=2$ ナラバ $\mathfrak{p}_i^{m_i} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_i^{m_i+1} \not\supset \mathfrak{a}$ トナル自然数 $m_i$ ガ定マリ

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_2^{m_2}$$

ナリ。

尚コノ Zerlegung ハ eindeutig ナリ。

証明:

$\mathfrak{p}_i \supseteq \mathfrak{a}$ ナル故 $\mathfrak{p}_i^{m_i} = \mathfrak{a}$ カ又ハ $\mathfrak{p}^{m_i} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m_i+1} \not\supset \mathfrak{a}$ ノ何レカニ定マリカヽル $m_i$ ハ一定スル。

$r=1$ ナルトキ $\mathfrak{p}^m \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}^{m+1} \not\supset \mathfrak{a}$ トスルト

$\mathfrak{y} \supset \mathfrak{a}(\mathfrak{p}^{-1})^m$ ニシテ $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}^{-1})^m$ ハ $\mathfrak{y}$ ノ ganzes Ideal ナル故ニ $\mathfrak{y} \supset \mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{p}^{-1})^m \supseteq \mathfrak{a}$ ナル Primideal $\mathfrak{p}'$ が存在スル。$r=1$ ナル故 $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}$ トナリ、$\mathfrak{p}^{m+1} \supset \mathfrak{a}$ トナル。之レ $\mathfrak{p}^{m+1} \nsupseteq \mathfrak{a}$ ニ反ス。故ニコノトキハ $\mathfrak{a}=\mathfrak{p}^m$ ナリ。

$r \geqq 2$ ナルトキハ $\mathfrak{p}_i^{m_i} \supset \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_i^{m_i+1} \nsupseteq \mathfrak{a}$ ナル場合ナリ。ソレハ $\mathfrak{p}_i^{m_i}=\mathfrak{a}$ トスルトモ他ニ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ノ無イコトニナリ $r \geqq 2$ ニ反ス。

サテ $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}_j)=\mathfrak{y}$ $(i \neq j)$ ナル故ニ

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p}_1^{m_1} \cap \cdots\cdots \cap \mathfrak{p}_2^{m_r} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

ナリ。ソコデ

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

トスルト

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-1})^{m_1} \cdots\cdots (\mathfrak{p}_2^{-1})^{m_r} \subset \mathfrak{y}$$

トナリ $\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-1})^{m_1} \cdots\cdots (\mathfrak{p}_2^{-1})^{m_r}$ ハ $\mathfrak{y}$ ノ ganzes Ideal ヲナス故ニ

$$\mathfrak{a}(\mathfrak{p}_1^{-1})^{m_1} \cdots\cdots (\mathfrak{p}_r^{-1})^{m_r} \subseteq \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{y}$$

ナル Primideal $\mathfrak{p}'$ が存在スル。従ッテ

$$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{p}'\mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{p}_r^{m_r} \subseteq \mathfrak{p}'$$

トナリ，$\mathfrak{p}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{p}_r$ ハ $\mathfrak{a}$ ヲ含ム Primideal ノスベテデアルカラ

$$\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}_i$$

ナル $\mathfrak{P}_i$ ガアル。ソウスルト

$$\mathfrak{a} \leq \mathfrak{P}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_i^{m_i+1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_r^{m_r} \subset \mathfrak{P}_i^{m_i+1}$$

トナリ始メノ $\mathfrak{P}_i^{m_i+1} \not\supset \mathfrak{a}$ トシタノニ反ス。

故ニ

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{P}_1^{m_1} \cdots\cdots \mathfrak{P}_r^{m_r}$$

ナリ。

尚コノ Zerlegung ノ eindeutig ナルコトハ明ラカナリ。

—— 証終リ ——

（以上）